# Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel:

Bei einer Studie werden die Augen von 570 Frauen (A) und 430 Männern untersucht. Insgesamt sind 60 Personen rot-grün-blind (B), darunter 20 Frauen.

Erstellen Sie eine passende Vierfeldertafel, indem Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren.

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,02 | 0,04 | 0,06 |
| $\overline{B}$ | 0,55 | 0,39 | 0,94 |
| | 0,57 | 0,43 | 1 |

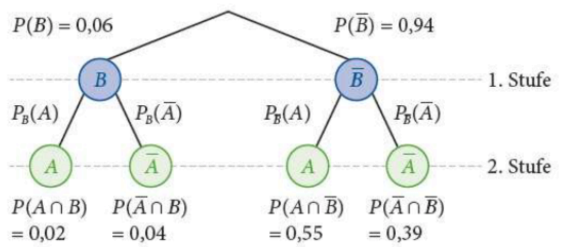
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.
$E_1$: „eine zufällig ausgewählte Person ist männlich und rot-grün-blind."
$E_2$: „eine zufällig ausgewählte Person ist nicht rot-grün-blind."
$E_3$: „eine zufällig ausgewählte Person ist weiblich oder rot-grün-blind."

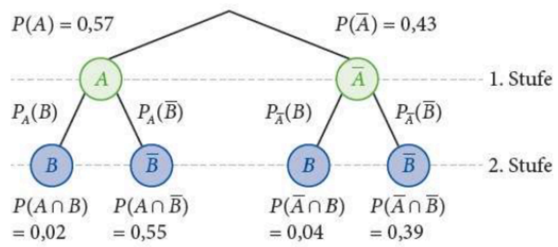
$$P(E_1) = P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}04$$

$$P(E_2) = P\left(\overline{B}\right) = 0{,}94$$

$$P(E_3) = P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}57 + 0{,}06 - 0{,}02 = 0{,}61$$

Man kann die Situation auch als zweistufiges Zufallsexperiment auffassen. Man fragt dabei einerseits nach dem Geschlecht einer Person und andererseits danach, ob diese Person rot-grün-blind ist. Je nachdem, welche der zwei Fragen man zuerst stellt, ergeben sich die zwei folgenden unterschiedlichen Baumdiagramme:




Die Wahrscheinlichkeiten für die Zweige der ersten Stufe sowie die Wahrscheinlichkeiten der vier Elementarereignisse kann man der Vierfeldertafel entnehmen.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Zweige in der 2. Stufe können aber nicht direkt aus der Vierfeldertafel abgelesen werden.

Auf diesen Zweigen sind die Wahrscheinlichkeiten eingetragen, die voraussetzen, dass man bereits eine Sache über die Person weiß:
Im linken Baumdiagramm fragt man in der 2. Stufe nach der Wahrscheinlichkeit des Geschlechts unter der Bedingung, dass man die Rot-Grün-Erblindung der Person kennt.
Im rechten Baumdiagramm fragt man in der 2. Stufe nach der Wahrscheinlichkeit einer Rot-Grün-Erblindung unter der Bedingung, dass man das Geschlecht der Person kennt.

Solche Wahrscheinlichkeiten heißen bedingte Wahrscheinlichkeiten und man schreibt dafür:
$P_B(A)$ bzw. $P_A(B)$ .

Entsprechend der Pfadregel gilt:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad \text{bzw.} \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{bzw.} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

<u>Definition:</u>

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis B eintritt, unter der Bedingung, dass ein Ereignis A bereits eingetreten ist.

Es gilt: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten befinden sich in einem zweistufigen Baumdiagramm an den Zweigen der 2. Stufe.

Aufgaben:

1 Bestimmen Sie mit den Werten aus dem Eingangsbeispiel die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
$E_1$: „eine weibliche Person ist rot-grün-blind."
$E_2$: „eine rot-grün-blinde Person ist männlich."
$E_3$: „eine männliche Person ist rot-grün-blind."

2.0 Prüfen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

2.1 Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt $P(\overline{A}) = P(\overline{B})$.

2.2 Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$.

2.3 Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt $P_A(B) = P(B)$.

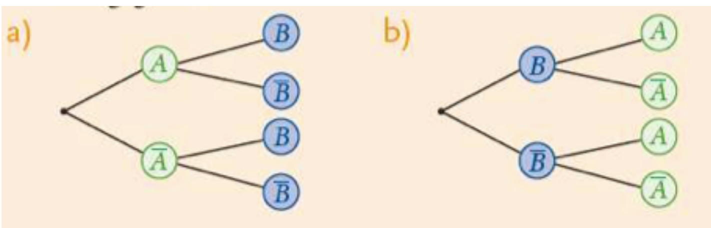
2.4 Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

2.5 Sind zwei Ereignisse nicht stochastisch unabhängig, so sind sie stochastisch abhängig.

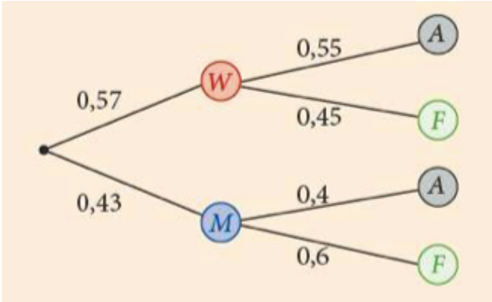
3 Gegeben ist folgende Vierfeldertafel:

| $\Omega$ | $B$ | $\overline{B}$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0,25 | 0,35 | 0,6 |
| $\overline{A}$ | 0,3 | 0,1 | 0,4 |
| $\Sigma$ | 0,55 | 0,45 | 1 |

Übertragen Sie die beiden unten stehenden Baumdiagramme in Ihr Heft und ergänzen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Untersuchen Sie die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit.



4 Das folgende Baumdiagramm enthält Informationen über das Geschlecht – weiblich (W), männlich (M) – der Absolventen der Hochschulreifeprüfung an der FOS/BOS Traunstein und ob sie die allgemeine (A) oder die fachgebundene Hochschulreife (F) erlangt haben.




Rekonstruieren Sie die zugehörige Vierfeldertafel sowie das inverse Baumdiagramm (Ereignisse A und F auf der 1. Stufe).

5.0 In einem Regal lagern 35 Flaschen Wein aus dem Elsass und 65 Flaschen Wein von der Mosel.
Von den 70 Flaschen mit Korkverschluss kommen 25 aus dem Elsass, die restlichen haben einen Schraubverschluss. Es wird zufällig eine Flasche aus dem Regal entnommen.

5.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche von der Mosel kommt und einen Schraubverschluss hat.

5.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Flasche aus dem Elsass ist, wenn man beim Herausnehmen erkennt, dass sie einen Korkverschluss hat.

6.0 92 % aller mit dem Bus fahrenden Schüler besitzen eine Monatskarte, 8 % der Schüler haben ein Wochenticket. 3 % der Schüler mit Monatskarte haben diese vergessen.
Von den Schülern mit einem Wochenticket haben 95 % ihren Fahrschein dabei.

6.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Kontrolle einen Schüler anzutreffen, der sein Ticket vergessen hat.

6.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Kontrolle einen Schüler anzutreffen, der eine Monatskarte besitzt, wenn man weiß, dass er ein Ticket dabei hat.

7.0 Leonie muss auf ihrem Heimweg zwei Ampeln passieren. An 7 von 10 Tagen steht die 1. Ampel auf Rot. Die 2. Ampel steht zu 64 % auf Grün. An 32 von 100 Tagen muss Leonie an beiden Ampeln warten.

7.1 Erstellen Sie mithilfe folgender Ereignisse eine Vierfeldertafel.
$A_1$: „Die 1. Ampel steht auf Grün."
$A_2$: „Die 2. Ampel steht auf Grün."

Jochen Weber

7.2 Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mithilfe von $A_1$ und $A_2$ und berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
B: „An einem Tag ist die 1. Ampel rot und die 2. Ampel grün."
C: „An einem Tag, an dem die 2. Ampel grün ist, steht die 1. Ampel auf Rot."
D: „An einem Tag, an dem die 1. Ampel auf Rot steht, zeigt die 2. Ampel grün."

8 Bei einer Umfrage gab jede 5. Person an, dass sie sowohl Sommer- als auch Winterurlaub macht. 55 % der Befragten fahren im Sommer, aber nicht im Winter in den Urlaub, während 15 von 100 Personen nur im Winter, aber nicht im Sommer verreisen.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse an.
A: „Eine Person verreist weder im Winter noch im Sommer."
B: „Eine Person, die im Sommer verreist, macht Winterurlaub."
C: „Eine unter den Winterurlaubern zufällig ausgewählte Person verreist nicht im Sommer."

9.0 Im Biologieunterricht wird über die Zuverlässigkeit von Schwangerschaftstests diskutiert. Nach Aussagen der Hersteller besitzen die Testverfahren zum Nachweis von Schwangerschaften eine hohe Sicherheit. Zeigt der Test eine Schwangerschaft an, liegt diese in 98,5 % der Fälle vor.
Bei 0,8 % der schwangeren Testpersonen wird irrtümlich keine Schwangerschaft angezeigt.
Mutmaßungen zufolge sind 3/4 der durchgeführten Schwangerschaftstests negativ.

9.1 Bestimmen Sie die in der Aufgabenstellung enthaltenen Ereignisse und geben Sie deren Wahrscheinlichkeiten an.

9.2 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel.

9.3 Erstellen Sie die beiden möglichen Baumdiagramme und vergleichen Sie diese.

10.0 Eine nächtliche Kontrolle der Fahrradfahrer in einer Stadt ergab, dass 68 % aller kontrollierten Radfahrerinnen und Radfahrer mit Licht fuhren. 75 % der Personen, die ohne Licht fuhren, waren weiblich. 2 von 10 Fahrrädern hatten Licht und wurden von einem Mann gefahren.
M: „Das Rad wurde von einem Mann gefahren."
L: „Das Licht war an."

10.1 Beschreiben Sie alle in der Aufgabenstellung enthaltenen Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Ereignisse L und M sowie ihrer Gegenereignisse.

10.2 Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und geben Sie die erforderlichen Rechnungen an.

10.3 Erstellen Sie zwei verschiedene Baumdiagramme. Zeigen Sie die Zusammenhänge zwischen der Vierfeldertafel und den Baumdiagrammen auf.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.
A: „Ein Rad wurde von einem Mann gefahren und es hatte das Licht an."
B: „Ein Rad, das von einer Frau gefahren wurde, hatte Licht."

11 Werden duale Bildungsgänge bevorzugt von weiblichen Schülern gewählt ?
An einer beruflichen Schule sieht es wie folgt aus: Die Schule hat 400 Schülerinnen. Ein Viertel der Schülerinnen besucht einen dualen Bildungsgang. Jede 6. Person, die einen dualen Bildungsgang besucht, ist weiblich. Jede 16. Person, die die Schule besucht, ist weiblich und in einem dualen Bildungsgang.

12.0 Für Kinder gibt es auf dem Bauernhof spezielle Angebote, die stetig der Nachfrage angepasst werden sollen.
Derzeit stehen Ponys (P) zur Pferdepflege und für kleine Ausritte zur Verfügung.
Ebenso besteht die Möglichkeit zur Mithilfe im Kuh- und Kälberstall (S). Aus dem Vorjahr ist bekannt, dass sich von 400 Kindern 108 für die Arbeit im Stall und 250 für die Ponys begeisterten, wobei 20 % dieser Ponyinteressierten auch von der Mithilfe im Stall nicht genug bekommen konnten.
(Abitur 2019 Teil 2 SI)

12.1 Berechnen Sie, für wie viel Prozent der Kinder ein Alternativangebot ohne Tierkontakt wünschenswert wäre.

12.2 Ermitteln Sie, ob die Mithilfe im Stall bei den Ponyinteressierten beliebter ist als bei denen, die sich nicht für Ponys begeistern.

13 Das Haarefärben ist sowohl bei Erwachsenen als auch bei Jugendlichen sehr beliebt.
Um ihre Zeitplanung zu optimieren, führt die Salonbesitzerin eine Strichliste, in der sie das Alter aller Kunden sowie deren Wunsch nach Farbe vermerkt.
Unter 200 Kunden waren 140 Erwachsene (E). Insgesamt ließen sich 55 Kunden die Haare färben (F). 40 Kunden waren Jugendliche, die sich gegen eine Koloration entschieden.
Untersuchen Sie, bei welcher Altersgruppe das Haarefärben beliebter ist.
(Abitur 2019 Teil 2 SII)

14.0 Das Kreuzfahrtschiff „Königin Maria II“ legt im Hafen von Barcelona an. An Bord sind 1000 Passagiere. 60 % davon sind weiblich (W), der Rest männlich. 80 % der weiblichen Passagiere nehmen an einem Ausflug (A) in die Stadt teil.
Insgesamt bleiben 200 Passagiere an Bord. (Abitur 2019 Nachtermin Teil 1)

14.1 Beschreiben Sie das Ereignis $E_1 = \overline{\overline{W} \cup A}$ möglichst einfach in Worten.

14.2 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$ dafür, dass ein Passagier männlich ist oder nicht von Bord geht.

14.3 Eine Passagierin behauptet, dass Landausflüge unter den Frauen beliebter sind als unter den Männern.
Entscheiden Sie rechnerisch, ob die Behauptung der Passagierin zutreffend ist.

15.0 Um die Schneesicherheit zu erhöhen, wird im Skigebiet zwischen den Gemeinden Oberdorf (O) und Unterdorf $\left(\overline{O}\right)$ darüber diskutiert, ob eine Beschneiungsanlage gebaut werden soll. Um sich einen Überblick zu verschaffen, wie die Einwohner zu diesem Projekt eingestellt sind, wird eine Umfrage durchgeführt. Aus den beiden Gemeinden nehmen insgesamt 1200 Personen daran teil. Die Auswertung ergab, dass unter den 700 befragten Oberdorfern 600 Befürworter (B) sind. 25 % aller Befragten sind aus Unterdorf und äußern Einwände gegen die Anlage.
(Abitur 2020 Teil 1)

15.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Umfrage folgende Frage verneint: „Sind Sie aus Oberdorf und haben Sie gegen den Bau der Beschneiungsanlage gestimmt ?“

15.2 Geben Sie den Anteil der Befürworter der Beschneiungsanlage unter allen Befragten an und reflektieren Sie kritisch, ob die Umfrage für den Bau spricht.

16 Die Schokoladentafeln gibt es in herkömmlicher Qualität sowie in Bioqualität. Der Hersteller bietet Nussschokoladen (N) und nussfreie Tafeln an. Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass von den Käufern der Nussschokolade 32 % Bioqualität wählen und sich 22 % der Käufer der nussfreien Sorte für das Bioprodukt entscheiden. Im Verkauf beträgt der Bioanteil (B) insgesamt 25 %.
Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms den prozentualen Anteil der Nussschokoladen im Verkauf. (Abitur 2020 Teil 2 SI)

17 Aufgrund von Kundenanfragen und da der Großhändler ein günstiges Angebot für Rotklee erhalten hat, will er in Zukunft eine Kleemischung aus Weißklee (W) und Rotklee (R) anbieten. Laut dem Samenproduzenten liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn vom Weißklee keimt, bei 92,5 %. Die Keimwahrscheinlichkeit der Rotkleesamen liegt bei 80 %.
Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms, in welchem Verhältnis der Großhändler Weiß- und Rotkleesamen mischen muss, damit die Keimwahrscheinlichkeit P(K) der Mischung bei 85 % liegt. (Abitur 2020 Teil 2 SII)

18.0 Gegen eine Gebühr liefert der Schreiner die gekauften Möbel an seine Kunden aus. Von insgesamt 200 Kunden stammen 80 aus einem Umkreis von 50 km (U) um den Standort der Schreinerei. 128 Kunden nehmen den Lieferservice nicht in Anspruch $\left(\overline{L}\right)$.

Um die Auslieferungen besser planen zu können, hat der Schreiner in der folgenden Tabelle die Anzahl der zu beliefernden Kunden (L) - also insgesamt 72 – je nach Bestellumfang und Lieferort darstellt. (Abitur 2021 SII)

| | U | $\overline{U}$ |
|---|---|---|
| ≤ 2 Möbelstücke | 7 | 17 |
| > 2 Möbelstücke | 18 | 30 |

18.1 Ergänzen Sie die untenstehende Vierfeldertafel mithilfe der obigen Angaben.

| | U | $\overline{U}$ | |
|---|---|---|---|
| L | | | |
| $\overline{L}$ | | | |
| | | | 200 |

Bestimmen Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mehr als 50 km von der Schreinerei entfernt wohnt und seine Möbel selbst abholt.

18.2 Beschreiben Sie mit eigenen Worten jeweils die Bedeutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_U\left(\overline{L}\right)$ bzw. $P_{\overline{U}}\left(\overline{L}\right)$ im Sachzusammenhang (ohne sie zu berechnen) und interpretieren Sie die hier geltende Beziehung $P_U\left(\overline{L}\right) > P_{\overline{U}}\left(\overline{L}\right)$ im Sinne der vorliegenden Thematik.

19.0 Abgesehen von der Gewichtsklasse spielen die Farben (braun, weiß) und die Größe (groß, klein) der Eier eine Rolle. An einem Tag werden insgesamt 1000 Eier eingesammelt, 600 davon waren braun. 25 % dieser braunen Eier waren auch groß. 10 % aller an einem diesem Tag gesammelten Eier waren weiß und groß. (ohne Hilfsmittel)

19.1 Ermitteln Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele kleine Eier an diesem Tag gesammelt wurden.

19.2 Prüfen Sie, ob der Anteil der großen Eier unter den braunen Eiern höher ist als unter den weißen Eiern.

20 Die Schülerinnen und Schüler der Fachoberschule im Allgäu haben eine Nisthilfe für solche Wildbienen errichtet, die in Röhrchen nisten. 80 % der dort beobachteten Wildbienen sind Mauerbienen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beobachtete Mauerbiene weiblich ist, liegt bei 40 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Wildbiene keine Mauerbiene und nicht weiblich ist, beträgt 15 %.
Bestimmen Sie unter Verwendung einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit, dass eine an der Nisthilfe beobachtete Wildbiene nicht weiblich ist.

21 Beim Telekommunikationsunternehmen gehen von einigen Kunden Beschwerden ein, dass die Internetverbindung oft unterbrochen wird. Bei einer Problemanalyse der Internetverbindung bei allen Kunden des Unternehmens soll untersucht werden, ob die Verbindungsabbrüche mit dem verwendeten Router zusammenhängen (mitbestellter Router (R) oder anderweitig organisierter Router). Aus Unternehmensdaten geht hervor, dass die Internetverbindung bei 60 % aller Kunden ohne Unterbrechungen $\left(\overline{U}\right)$ funktioniert. Die Hälfte aller Kunden hat eine unterbrechungsfreie Internetverbindung und einen beim Telekommunikationsunternehmen mitbestellten Router.
Es gilt weiterhin $P(R)=0{,}8$.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$, z.B. mithilfe einer Vierfeldertafel. Formulieren Sie im Sinne des vorliegenden Sachzusammenhangs eine Aussage in Worten, in der Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten $P_R(U)$ und $P_{\overline{R}}(U)$ miteinander vergleichen. (Abitur 2022 SI)

22 In einer Urne befinden sich sechs grüne, eine rote und eine blaue Kugel.
Ein Zufallsexperiment besteht darin, nacheinander jeweils zufällig eine Kugel ohne Zurücklegen zu ziehen und deren Farbe festzustellen. Es wird so lange gezogen, bis die blaue Kugel erscheint, höchstens jedoch dreimal. (Abitur 2023 SII)
Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass insgesamt drei Kugeln gezogen werden unter der Bedingung, dass das Zufallsexperiment mit der blauen Kugel endet. (Abitur 2023 SII)

23.0 In einer Kleinstadt sind 30 % aller zugelassenen Elektroautos der Oberklasse (O) zuzuordnen, die restlichen werden der Mittelklasse (M) zugeordnet. Die Akkus aller hier betrachteten Elektroautos werden zu 39,5 % regelmäßig über eine Photovoltaik-Anlage (V) des jeweiligen Fahrzeugeigners geladen.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig aus all diesen Fahrzeugen ausgewähltes Elektroauto ein Modell der Oberklasse ist und regelmäßig über eine Photovoltaik-Anlage aufgeladen wird, beträgt 25,5 %. (Abitur 2023 SI)

23.1 Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_3=\overline{M\cap V}$.

23.2 Untersuchen Sie, ob der Anteil der Fahrzeuge, die über eine Photovoltaik-Anlage des Fahrzeugeigners geladen werden, bei den Oberklasse-Modellen höher ist als bei den Mittelklasse-Modellen. Entscheiden Sie anschließend, ob die Ereignisse M und V stochastisch unabhängig sind.

24 Bei der Befragung von zufällig ausgewählten Kunden eines Lebensmittelmarkts wird unter anderem untersucht, ob sie Vegetarier (V) sind bzw. ob sie in bar (B) bezahlen. Das Ergebnis der Befragung ist in der nebenstehenden Vierfeldertafel dargestellt.

| | $V$ | $\overline{V}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,10 | 0,45 | 0,55 |
| $\overline{B}$ | 0,05 | 0,40 | 0,45 |
| | 0,15 | 0,85 | 1 |

Untersuchen Sie, ob der Anteil der Barzahler unter den Vegetariern höher ist als der Anteil der Barzahler unter den Nicht-Vegetariern. (Abitur 2024 Teil 1)

25 Ein Hotel, welches zur Europameisterschaft ausschließlich mit Fans belegt ist, bietet neben den gewöhnlichen Services zwei zusätzliche Dienste an, welche die Gäste wählen können. Diese sind ein Fahrdienst zum Spiel im örtlichen Stadion (F) sowie ein Besuch des Trainingsgeländes der ansässigen Nationalmannschaft (N). Von früheren Großereignissen ist bekannt, dass drei von fünf Gästen den Fahrdienst wählen. Insgesamt entscheiden sich 50 % aller Gäste für genau einen der beiden zusätzlichen Dienst. Außerdem gilt: $P_F(N) = 0{,}25$.

Bestimmen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, wie viele der insgesamt 400 Gäste des Hotels keinen der beiden zusätzlichen Dienst wünschen. (Abitur 2024 SI)

26 Die Schülerin Lena entscheidet sich für ein Gap Year mit Auslandsaufenthalt in Asien. Sie findet einen Job bei einer Auffangstation für Meerestiere. Im Durchschnitt sind 65 von 100 behandelten Tieren in der Station Meeresschildkröten (S). Insgesamt sind 60 % aller Verletzungen und Krankheiten bei Meerestieren die Folge von Plastikmüll (M) in den Ozeanen, zwei Drittel davon treten bei Meeresschildkröten auf. Erstellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = M \cup S$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (Abitur 2024 SII)

**<u>Lösungen:</u>**

1)

$$P(E_1) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,02}{0,57} \approx 3,5\%$$

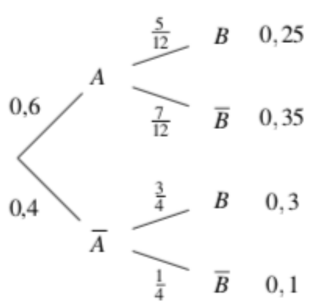
$$P(E_2) = P_B\left(\overline{A}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P(B)} = \frac{0,04}{0,06} \approx 66,7\%$$

$$P(E_3) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0,04}{0,43} \approx 9,3\%$$

2.1 Falsch. 2.2 Falsch. 2.3 Wahr. 2.4 Wahr. 2.5 Wahr.

3)

**a)**




$P(A) = 0,6$; $P(\overline{A}) = 0,4$; $P(A \cap B) = 0,25$
$P(A \cap \overline{B}) = 0,35$; $P(\overline{A} \cap B) = 0,3$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1$
können direkt abgelesen werden, der Rest muss berechnet werden:

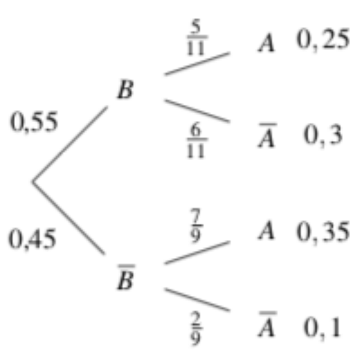
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,25}{0,6} = \frac{5}{12}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0,35}{0,6} = \frac{7}{12}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

**b)**




$P(B) = 0,55$; $P(\overline{B}) = 0,45$; $P(A \cap B) = 0,25$
$P(\overline{A} \cap B) = 0,3$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,35$; $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,1$
können direkt abgelesen werden, der Rest muss berechnet werden:

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,55} = \frac{5}{11}$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} = \frac{0,3}{0,55} = \frac{6}{11}$$

$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(\overline{B})} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{B})} = \frac{0,1}{0,45} = \frac{2}{9}$$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad \Rightarrow 0,6 \cdot 0,55 = 0,33 \neq 0,25$$

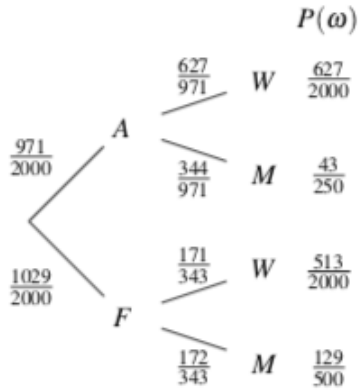
$\Rightarrow$ A und B stochastisch abhängig

4)

Vierfeldertafel

| $\Omega$ | $W$ | $M$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $\frac{627}{2000}$ | $\frac{43}{250}$ | $\frac{971}{2000}$ |
| $F$ | $\frac{513}{2000}$ | $\frac{129}{500}$ | $\frac{1029}{2000}$ |
| $\Sigma$ | $\frac{57}{100}$ | $\frac{43}{100}$ | 1 |

Inverses Baumdiagramm:




5.1

| | $E$ | $\overline{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $K$ | 0,25 | 0,45 | 0,7 |
| $\overline{K}$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| | 0,35 | 0,65 | 1 |

$$P\left(\overline{E}\cap\overline{K}\right)=0{,}2$$

5.2 $P_K(E)=\frac{P(K\cap E)}{P(K)}=\frac{0{,}25}{0{,}7}=\frac{5}{14}$

6.1

| | $M$ | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| $T$ | 0,8924 | 0,076 | 0,9684 |
| $\overline{T}$ | 0,0276 | 0,004 | 0,0316 |
| | 0,92 | 0,08 | 1 |

$$P_M\left(\overline{T}\right)=0{,}03=\frac{P\left(M\cap\overline{T}\right)}{P(M)} \quad\Rightarrow P\left(M\cap\overline{T}\right)=P_M\left(\overline{T}\right)\cdot P(M)=0{,}03\cdot 0{,}92=0{,}0276$$

$$P_{\overline{M}}\left(T\right)=0{,}95=\frac{P\left(\overline{M}\cap T\right)}{P\left(\overline{M}\right)} \quad\Rightarrow P\left(\overline{M}\cap T\right)=P_{\overline{M}}\left(T\right)\cdot P\left(\overline{M}\right)=0{,}95\cdot 0{,}08=0{,}076$$

$$P\left(\overline{T}\right)=0{,}0316$$

6.2 $P_T(M)=\dfrac{P\left(T\cap M\right)}{P(T)}=\dfrac{0{,}8924}{0{,}9684}\approx 0{,}92152$

7.1

| | $A_1$ | $\overline{A_1}$ | |
|---|---|---|---|
| $A_2$ | 0,26 | 0,38 | 0,64 |
| $\overline{A_2}$ | 0,04 | 0,32 | 0,36 |
| | 0,3 | 0,7 | 1 |

7.2

$$P(B) = P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) = 0{,}38$$

$$P(C) = P_{A_2}\left(\overline{A_1}\right) = \frac{P\left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)}{P\left(A_2\right)} = \frac{0{,}38}{0{,}64} = 0{,}59375$$

$$P(D) = P_{\overline{A_1}}\left(A_2\right) = \frac{P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right)}{P\left(\overline{A_1}\right)} = \frac{0{,}38}{0{,}7} \approx 0{,}543$$

8)

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $W$ | 0,2 | 0,15 | 0,35 |
| $\overline{W}$ | 0,55 | 0,1 | 0,65 |
| | 0,75 | 0,25 | 1 |

$$P(A) = P\left(\overline{S} \cap \overline{W}\right) = 0{,}1$$

$$P(B) = P_S(W) = \frac{P(S \cap W)}{P(S)} = \frac{0{,}2}{0{,}75} \approx 0{,}276$$

$$P(C) = P_W\left(\overline{S}\right) = \frac{P\left(W \cap \overline{S}\right)}{P(W)} = \frac{0{,}15}{0{,}35} \approx 0{,}429$$

9.1 A: „Test zeigt eine Schwangerschaft an.“ B: „Testperson ist schwanger.“

$P_A(B) = 0{,}985 \qquad P_B\left(\overline{A}\right) = 0{,}008 \qquad P\left(\overline{A}\right) = 0{,}75$

9.2

$$0{,}985 = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} \quad \Rightarrow P\left(A \cap B\right) = 0{,}985 \cdot 0{,}25 = 0{,}24625$$

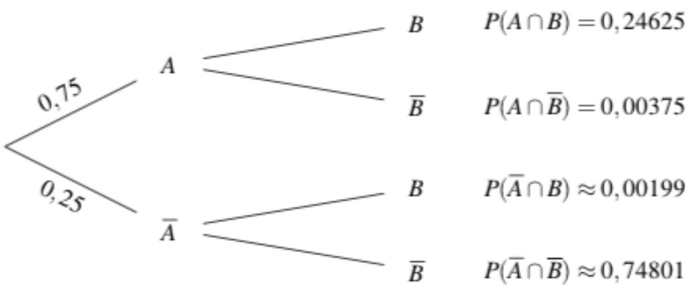
$$0{,}008 = \frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P(B)} \quad \Rightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}008 \cdot P(B) = 0{,}008 \cdot (P\left(A \cap B\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right)) =$$

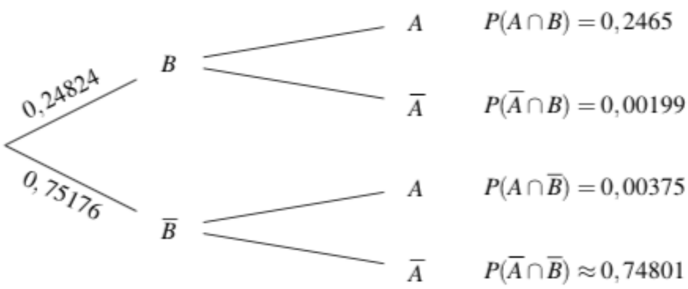
$$\Rightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}008 \cdot \left(0{,}24625 + P\left(\overline{A} \cap B\right)\right) \quad \Rightarrow 0{,}992 \cdot P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}00197$$

$$\Rightarrow P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{0{,}00197}{0{,}992} = 0{,}00199$$

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,24625 | 0,00199 | 0,24824 |
| $\overline{B}$ | 0,00375 | 0,74801 | 0,75176 |
| | 0,25 | 0,75 | 1 |

9.3




10.1 $P(L)=0{,}68 \qquad P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)=0{,}75 \qquad P(L\cap M)=0{,}2$

10.2

$P\left(\overline{L}\right)=1-P(L)=0{,}32 \qquad P(L)=P(L\cap M)+P\left(L\cap\overline{M}\right) \Rightarrow P\left(L\cap\overline{M}\right)=0{,}68-0{,}2=0{,}48$

$$P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)=\frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{M}\right)}{P\left(\overline{L}\right)} \quad \Rightarrow P\left(\overline{L}\cap\overline{M}\right)=0{,}75\cdot 0{,}32=0{,}24$$

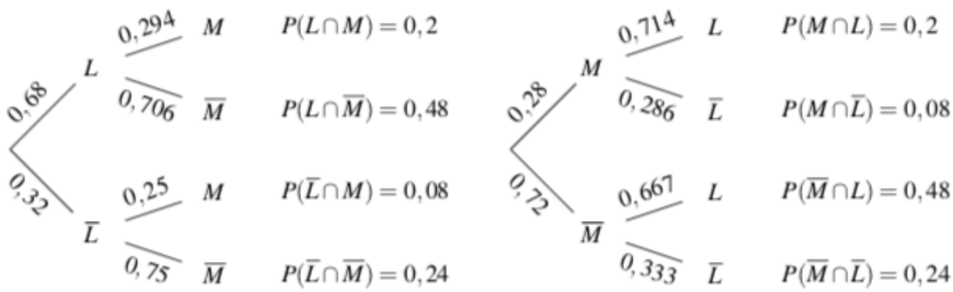
$P\left(\overline{L}\right)=P\left(\overline{L}\cap M\right)+P\left(\overline{L}\cap\overline{M}\right) \quad \Rightarrow P\left(\overline{L}\cap M\right)=0{,}32-0{,}24=0{,}08$

$P(M)=P\left(L\cap M\right)+P\left(\overline{L}\cap M\right)=0{,}2+0{,}08=0{,}28$

$P\left(\overline{M}\right)=1-P(M)=0{,}72$

| | M | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| L | 0,2 | 0,48 | 0,68 |
| $\overline{L}$ | 0,08 | 0,24 | 0,32 |
| | 0,28 | 0,72 | 1 |

10.3




Die Pfadwahrscheinlichkeiten am Ende der Pfade befinden sich bei der Vierfeldertafel in der Mitte. Die Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen der 1. Stufe befinden sich bei der Vierfeldertafel in den Randfeldern. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen der 2. Stufe erhält man bei der Vierfeldertafel, indem man eine Wahrscheinlichkeit in der Mitte durch eine zugehörige Wahrscheinlichkeit am Rand dividiert.

$$P(A)=P(L\cap M)=0,2$$

$$P(B)=P_{\overline{M}}(L)=\frac{P\left(\overline{M}\cap L\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=\frac{0,48}{0,72}=\frac{2}{3}$$

11) W: „Eine Person, die die berufliche Schule besucht, ist weiblich.“
D: „Eine Person, die die berufliche Schule besucht, ist in einem dualen Studiengang.“

$$P_W(D)=\frac{1}{4}\qquad P_D(W)=\frac{1}{6}\qquad P(D\cap W)=\frac{1}{16}$$

$$P_W(D)=\frac{P(W\cap D)}{P(W)}\quad\Rightarrow P(W)=\frac{P(W\cap D)}{P_W(D)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

$$P_D(W)=\frac{P(D\cap W)}{P(D)}\quad\Rightarrow P(D)=\frac{P(D\cap W)}{P_D(W)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$$

$$P(D)\cdot P(W)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}\neq P(D\cap W)$$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse W und D sind stochastisch abhängig.

Da der Anteil der weiblichen Personen an der beruflichen Schule ein Viertel beträgt, in den dualen Bildungsgängen jedoch nur ein Sechstel, ist die Frage für die berufliche Schule mit Nein zu beantworten.

12.1

| | $P$ | $\overline{P}$ | |
|---|---|---|---|
| $S$ | 50 | 58 | 108 |
| $\overline{S}$ | 200 | 92 | 292 |
| | 250 | 150 | 400 |

$$P\left(\overline{S}\cap\overline{P}\right)=\frac{92}{400}=0{,}23 \quad \Rightarrow 23\,\%$$

12.2

$$P_P\left(S\right)=0{,}2 \qquad P_{\overline{P}}\left(S\right)=\frac{P\left(\overline{P}\cap S\right)}{P\left(\overline{P}\right)}=\frac{\frac{58}{400}}{\frac{150}{400}}=0{,}3867$$

Die Mithilfe im Stall ist bei den Kindern beliebter, die sich nicht für Ponys interessieren.

13

| | $E$ | $\overline{E}$ | |
|---|---|---|---|
| $F$ | 35 | 20 | 55 |
| $\overline{F}$ | 95 | 40 | 145 |
| | 140 | 60 | 200 |

$$P_{\overline{E}}\left(F\right)=\frac{P\left(\overline{E}\cap F\right)}{P\left(\overline{E}\right)}=\frac{\frac{20}{200}}{\frac{60}{200}}=\frac{1}{3} \qquad P_E\left(F\right)=\frac{P\left(E\cap F\right)}{P\left(E\right)}=\frac{\frac{35}{200}}{\frac{140}{200}}=0{,}25$$

Das Haarefärben ist bei Jugendlichen beliebter als bei Erwachsenen.

14.1 $E_1 = \overline{\overline{W} \cup A} = W \cap \overline{A}$ $\Rightarrow$ "Passagier ist weiblich und bleibt an Bord."

14.2

| | $W$ | $\overline{W}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 480 | 320 | 800 |
| $\overline{A}$ | 120 | 80 | 200 |
| | 600 | 400 | 1000 |

$$P\left(\overline{W} \cup \overline{A}\right) = P\left(\overline{W}\right) + P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{W} \cap \overline{A}\right) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}08 = 0{,}52$$

14.3

$$P_W(A) = \frac{P(W \cap A)}{P(W)} = \frac{0{,}48}{0{,}6} = 0{,}8 \qquad P_{\overline{W}}(A) = \frac{P(\overline{W} \cap A)}{P(\overline{W})} = \frac{0{,}32}{0{,}4} = 0{,}8$$

$\Rightarrow$ die Behauptung der Passagierin ist falsch.

15.1

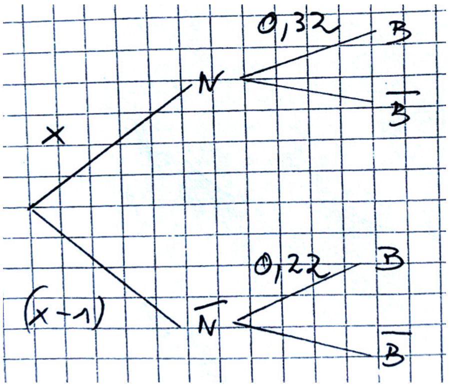
| | $O$ | $\overline{O}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 600 | 200 | 800 |
| $\overline{B}$ | 100 | 300 | 400 |
| | 700 | 500 | 1200 |

$$P\left(\overline{O \cap \overline{B}}\right) = 1 - \frac{100}{1200} = \frac{11}{12}$$

15.2 $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

Insgesamt ist die Mehrheit für den Bau. Betrachtet man jedoch Ober- und Unterdorf getrennt, so sieht man, dass in Unterdorf weniger als die Hälfte den Bau befürworten.

16



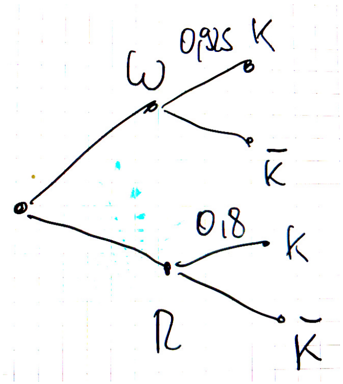

$P(B)=P(NB)+P\left(\overline{N}B\right)=0{,}25$

$\Rightarrow x\cdot 0{,}32+(1-x)\cdot 0{,}22=0{,}25 \quad \Rightarrow 0{,}32x+0{,}22-0{,}22x=0{,}25$

$\Rightarrow 0{,}10x=0{,}03 \quad \Rightarrow x=0{,}30$

Der prozentuale Anteil der Nussschokolade beträgt 30 %.

17




$P(W)\cdot 0{,}925+P(R)\cdot 0{,}8=0{,}85$

$\Rightarrow x\cdot 0{,}925+(1-x)\cdot 0{,}8=0{,}85 \quad \Rightarrow 0{,}925x+0{,}8-0{,}8x=0{,}85$

$\Rightarrow 0{,}125x=0{,}05 \quad \Rightarrow x=0{,}4$

$\Rightarrow P(W)=0{,}4 \quad P(R)=0{,}6$

$\Rightarrow$ Mischungsverhältnis $\quad W:R=2:3$

18.1

| | U | $\overline{U}$ | |
|---|---|---|---|
| L | 25 | 47 | 72 |
| $\overline{L}$ | 55 | 73 | 128 |
| | 80 | 120 | 200 |

$$P\left(\overline{U}\cap\overline{L}\right)=\frac{73}{200}=0{,}365$$

18.2 $P_U\left(\overline{L}\right)$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aus dem Umkreis von 50 km stammender Kunde nicht den Lieferservice in Anspruch nimmt.

$P_{\overline{U}}\left(\overline{L}\right)$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nicht aus dem Umkreis von 50 km stammender Kunde nicht den Lieferservice in Anspruch nimmt.

$P_U\left(\overline{L}\right)>P_{\overline{U}}\left(\overline{L}\right)$:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, den Lieferservice nicht in Anspruch zu nehmen, ist unter den Kunden, die im Umkreis von 50 km wohnen größer, als bei denen, die weiter weg wohnen.

19.1

| | B | W | |
|---|---|---|---|
| G | 0,15 | 0,1 | 0,25 |
| K | 0,45 | 0,3 | 0,75 |
| | 0,6 | 0,4 | 1 |

Es wurden 750 kleine Eier gesammelt.

19.2 $P_B(G)=\frac{0{,}15}{0{,}6}=\frac{1}{4}$ $\quad P_W(G)=\frac{0{,}1}{0{,}4}=\frac{1}{4}$

Der Anteil der großen Eier unter den braunen Eiern ist genauso groß wie unter den weißen Eiern.

20

| | $M$ | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| $W$ | 0,32 | 0,05 | 0,37 |
| $\overline{W}$ | 0,48 | 0,15 | 0,63 |
| | 0,80 | 0,20 | 1 |

$P_M(W)=0{,}40 \quad \Rightarrow \frac{P(M\cap W)}{P(M)}=0{,}40$

$\Rightarrow P(M\cap W)=0{,}40\cdot 0{,}80=0{,}32$

$P(\overline{W})=0{,}63$

21

| | $U$ | $\overline{U}$ | |
|---|---|---|---|
| $R$ | 0,3 | 0,5 | 0,8 |
| $\overline{R}$ | 0,1 | 0,1 | 0,2 |
| | 0,4 | 0,6 | 1 |

$$P_R(U)=\frac{P(R\cap U)}{P(R)}=\frac{0,3}{0,8}=0,375$$

$$P_{\overline{R}}(U)=\frac{P(\overline{R}\cap U)}{P(\overline{R})}=\frac{0,1}{0,2}=0,5$$

Die Unterbrechungen der Internetverbindung hängen mit der Wahl des firmeneigenen bzw. selbst organisierten Routers zusammen.

22

$C$: "drei Kugeln werden gezogen" $\Rightarrow C=\{ggg,ggr,ggb,grg,grb,rgg,rgb\}$

$B$: "Spiel endet mit einer blauen Kugel" $\Rightarrow B=\{ggb,grb,gb,rgb,rb,b\}$

$B\cap C=\{ggb,grb,rgb\}$

$$P_B(C)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

23.1

| | O | M | |
|---|---|---|---|
| V | 0,255 | 0,14 | 0,395 |
| $\overline{V}$ | 0,045 | 0,56 | 0,605 |
| | 0,3 | 0,7 | 1 |

$$P\left(\overline{M \cap V}\right) = 1 - P\left(M \cap V\right) = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$$

23.2

$$P_O\left(V\right) = \frac{P\left(O \cap V\right)}{P\left(O\right)} = \frac{0{,}255}{0{,}3} = 0{,}85 \qquad P_M\left(V\right) = \frac{P\left(M \cap V\right)}{P\left(M\right)} = \frac{0{,}14}{0{,}7} = 0{,}2$$

Der Anteil der Fahrzeuge, die über eine Photovoltaik-Anlage aufgeladen werden, ist bei den Oberklasse-Modellen höher als bei den Mittelklasse-Modellen.

$\Rightarrow$ M und V sind stochastisch abhängig

24

$$P_V\left(B\right) = \frac{P\left(V \cap B\right)}{P\left(V\right)} = \frac{0{,}10}{0{,}15} = \frac{2}{3} \qquad P_{\overline{V}}\left(B\right) = \frac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}45}{0{,}85} = \frac{9}{17}$$

$\Rightarrow P_V\left(B\right) > P_{\overline{V}}\left(B\right)$ $\Rightarrow$ unter den Vegetariern ist der Anteil der Barzahler größer

25

| | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $N$ | 0,15 | 0,05 | 0,20 |
| $\overline{N}$ | 0,45 | 0,35 | 0,8 |
| | 0,6 | 0,4 | 1 |

$$P_F(N)=\frac{P(F\cap N)}{P(F)} \Rightarrow P(F\cap N)=P_F(N)\cdot P(F)=0{,}25\cdot 0{,}6=0{,}15$$

$$P(\overline{N}\cap F)+P(N\cap\overline{F})=0{,}5 \quad \Rightarrow P(N\cap\overline{F})=0{,}05$$

$$\Rightarrow P(\overline{F}\cap\overline{N})=0{,}35$$

$\Rightarrow 400\cdot 0{,}35=140$ Gäste buchen keinen der beiden zusätzlichen Dienste

26

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $M$ | 0,4 | 0,2 | 0,6 |
| $\overline{M}$ | 0,25 | 0,15 | 0,4 |
| | 0,65 | 0,35 | 1 |

$$P(E_4)=P(M\cup S)=P(M)+P(S)-P(M\cap S)=0{,}6+0{,}65-0{,}4=0{,}85$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem behandelten Tier um eine Meeresschildkröte handelt oder dass die Verletzung oder Krankheit in Folge von Plastikmüll ist, beträgt 85 %.